Aula 5

Painéis Dinâmicos com T Curto - O Método de Momentos Generalizado (GMM)

Bibliografia:
Pesaran, M.H. (2015). Time series and panel data econometrics. Oxford: Oxford University Press.

Rafael S. M. Ribeiro

Centro de Desenvolvimento e Planejamento Regional (CEDEPLAR)

Faculdade de Ciências Econômicas (FACE)

Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

O Viés dos Estimadores de FE e RE

- Na presença de variável dependente defasada como variável explicativa a propriedade de exogeneidade estrita dos regressores se torna inválida.
- Neste contexto, os estimadores de FE e RE com N grande e T curto não são consistentes.

O Viés dos Estimadores de FE e RE

- Considere o modelo:

$$y_{it} = \alpha_i + \lambda y_{i,t-1} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_{it} + u_{it}$$

- Resolvendo y_{it} de forma recursiva, temos:

$$y_{it} = \left(\frac{1-\lambda^t}{1-\lambda}\right)\alpha_i + \lambda^t\, y_{i0} + \sum_{j=0}^{t} \lambda^j \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_{i,t-j} + \sum_{j=0}^{t-1} \lambda^j u_{i,t-j}$$

O Viés dos Estimadores de FE e RE

- A especificação acima possui dois problemas:
  - O termo y_{i0} é correlacionado com as defasagens de u_{it}
  - O termo $\lambda^t\, y_{i0}$ não desaparece para T curto (exceto se $\lambda = 1$).
- Logo, a propriedade de consistência do estimador de FE ou RE para λ não é observada.

$$\operatorname*{Plim}_{N\to\infty}\left(\hat{\lambda}_{FE} - \lambda\right) = -\frac{(1+\lambda)}{T}\left(1 - \frac{1}{T}\frac{1-\lambda^T}{1-\lambda}\right)\left[1 - \frac{1}{T} - \frac{2\lambda}{(1-\lambda)T}\left(1 - \frac{1}{T}\frac{1-\lambda^T}{1-\lambda}\right)\right]^{-1}$$

$$\operatorname*{Plim}_{N\to\infty}\left(\hat{\lambda}_{FE} - \lambda\right) = -\frac{(1+\lambda)}{T} + O(T^{-2})$$

O Método de Momentos Generalizado (GMM)

- Os estimadores comumente utilizados na teoria econométrica padrão são baseados em fortes pressupostos sobre o processo gerador dos dados. Exemplo: o estimador de OLS e ML.
- Na prática, não sabemos qual é a distribuição de probabilidades do processo gerador de dados.
- O Método Generalizado de Momentos (GMM) é um procedimento no qual o estimador requer apenas que um conjunto de condições de momento deduzidas dos pressupostos básicos de um modelo econométrico sejam satisfeitas. Isso torna os demais estimadores um caso especial do GMM.

O Método de Momentos Generalizado (GMM)

- Suponha uma função de probabilidade $f(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_T; \boldsymbol{\theta}_0)$, onde $\boldsymbol{\theta}_0$ é um vetor $q \times 1$ de parâmetros “verdadeiros” e$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_T$uma amostra de T observações.
- Seja $\boldsymbol{m}(.)$ um vetor de funções de dimensão r de modo que a condição de momento populacional assume a forma:

$$M_T(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{m}(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{\theta}) \qquad (1)$$

O Método de Momentos Generalizado (GMM)

- Temos três possibilidades:

i. Se $q > r$, então os parâmetros não são identificados
ii. Se $q = r$, então os parâmetros são exatamente identificados
iii. Se $q < r$, então os parâmetros são sobre-identificados e precisamos impor restrições às condições de momentos para que o vetor de parâmetros possa ser estimado (o que será feito a partir da matriz de ponderação)

O Método de Momentos Generalizado (GMM)

- O caso das condições de momentos exatamente identificadas $(q = r)$ é conhecido como o "método de momentos" com aplicações conhecidas nos métodos de OLS e IV.

$$M_T(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_T) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{m}(\boldsymbol{w}_t, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_T) = 0$$

- Exemplo: Considere o MRL $y_t = \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta}_0 + u_t$. Sob os pressupostos clássicos do MRL, temos que $E[\boldsymbol{x}_t(y_t - \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta}_0)] = 0, \mathrm{t} = 1,2, \dots, \mathrm{T}$.

O Método de Momentos Generalizado (GMM)

- Já no caso de excesso de condições de momento $(q > r)$, o sistema não possui solução única. Partindo de (1), definimos o estimador de GMM como:

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_T = \underset{\theta}{argmin}\{M'_T(\boldsymbol{\theta})A_T M_T(\boldsymbol{\theta})\} \quad (2)$$

onde A_T é a matrix de ponderações.

- Em (2), $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_T$ é o vetor de parâmetros que minimiza a função de perdas (*loss function*) definida por $M'_T(\boldsymbol{\theta})A_T M_T(\boldsymbol{\theta})$.

O Estimador de Variáveis Instrumentais Generalizado (GIVE)

- Considere o MRL: $y_t = \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{x}_t + u_t$.
- Seja $\boldsymbol{z}_t$ o vetor de instrumentos onde $\boldsymbol{z}_t$ é correlacionado com $\boldsymbol{x}_t$, mas independente de u_t.
- A partir de (1), a condição de momento é dada por:

$$M_T(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t (y_t - \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{x}_t)$$

O Estimador de Variáveis Instrumentais Generalizado (GIVE)

- Assumindo o caso mais geral, $q > r$, para obtermos o estimador GIVE a partir de (2), precisamos obter as matrizes A_T e $M_T(\boldsymbol{\beta})$.
- Sejam,

$$A_T = -(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})'(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\frac{1}{\sigma_u^2} \text{ e } M_T(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{T}\mathbf{Z}'(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}),$$

temos o estimador de GIVE:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_Z\boldsymbol{Y},$$

onde $\boldsymbol{P_Z} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z}'$.

O Estimador de Variáveis Instrumentais Generalizado (GIVE)

- O estimador da matriz de variância de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ é dada por:

$$\widehat{Var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}\right) = \hat{\sigma}_{IV}^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X})^{-1}$$

onde $\hat{\sigma}_{IV}^2$ é o estimador de VI de σ_u^2.

$$\hat{\sigma}_{IV}^2 = \frac{1}{T-K}\widehat{\boldsymbol{u}}_{IV}'\widehat{\boldsymbol{u}}_{IV},$$

onde $\hat{u}_{IV}$ é o resíduo da regressão

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_{IV} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$$

O Estimador de Variáveis Instrumentais Generalizado (GIVE)

- Repare que a matriz de ponderações $\boldsymbol{A}_T$ usada para computarmos o estimador ótimo $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ depende de σ_u^2. Por outro lado, a estimativa de σ_u^2, i.e. $\hat{\sigma}_{IV}^2$, depende do valor de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$.
- Resolvemos esse problema com o procedimento GMM *two-step*. Para isso, computamos um valor inicial para $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV_0}$ a partir de uma escolha arbitrária de A_T. A escolha mais comum para a matriz $\boldsymbol{A}_T$ no *first-step* é a matriz identidade $\boldsymbol{I}_q$. Com isso, obtemos $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV_1}$.
- Então plugamos $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV_1}$ na matriz de variância que, por sua vez, é plugada novamente na matriz $\boldsymbol{A}_T$ de modo a obtermos o estimador GMM assintóticamente eficiente $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV_2}$.

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM Difference (Arellano and Bond, 1991)

- Seja o modelo:

$$y_{it} = \lambda y_{i,t-1} + \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{x}_{it} + v_{it}$$
$$v_{it} = \alpha_i + u_{it}$$

- Podemos eliminar o efeito correspondente às unidades α_i tirando a primeira diferença:

$$\Delta y_{it} = \lambda \Delta y_{i,t-1} + \boldsymbol{\beta}' \Delta \boldsymbol{x}_{it} + \Delta u_{it}$$

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM Difference (Arellano and Bond, 1991)

- Contudo, note que

$$E\left[\Delta y_{i,t-1}\Delta u_{it}\right] = E\left[\lambda\Delta u_{i,t-1}\Delta u_{it}\right] \neq 0$$

- De modo mais geral, temos:

$$E\left[\Delta u_{i,t-s}\Delta u_{it}\right] = \begin{cases} 2\sigma_u^2, se\ s = 0 \\ -\sigma_u^2, se\ s = 1 \end{cases}$$

- Logo, o estimador de OLS é inconsistente.

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM Difference (Arellano and Bond, 1991)

- Arellano & Bond (1991) sugerem usar variáveis em nível defasadas como VI para as variáveis endógenas e estimar os parâmetros por GMM.
- Seja:

$$(y_{i3} - y_{i2}) = \lambda(y_{i2} - y_{i1}) + \boldsymbol{\beta}'\Delta\boldsymbol{x}_{i3} + \Delta u_{i3}$$
$$(y_{i4} - y_{i3}) = \lambda(y_{i3} - y_{i2}) + \boldsymbol{\beta}'\Delta\boldsymbol{x}_{i4} + \Delta u_{i4}$$
$$\dots$$
$$\left(y_{iT} - y_{i,T-1}\right) = \lambda\left(y_{i,T-1} - y_{i,T-2}\right) + \boldsymbol{\beta}'\Delta\boldsymbol{x}_{iT} + \Delta u_{iT}$$

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM *Difference* (Arellano and Bond, 1991)

- Na primeira equação, note que y_{i1} é um instrumento válido para $(y_{i2} - y_{i1})$, pois y_{i1} é correlacionado com $(y_{i2} - y_{i1})$ e não correlacionado com Δu_{i3}.
- Da mesma forma, na segunda equação, y_{i1} e y_{i2} são instrumentos válidos para $(y_{i3} - y_{i2})$.
- Na última equação, $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{i,T-2}$ são instrumentos válidos para $(y_{i,T-1} - y_{i,T-2})$.

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM *Difference* (Arellano and Bond, 1991)

- Assim, a matriz de variáveis instrumentais é dada por:

$$\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{W}, \Delta\boldsymbol{X})$$

onde

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_1 \\ \boldsymbol{W}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{W}_N \end{pmatrix}, \Delta\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{X}_1 \\ \Delta\boldsymbol{X}_2 \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{X}_N \end{pmatrix} \; e \; \boldsymbol{W}_i = \begin{pmatrix} y_{i1} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & y_{i1}, y_{i2} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{i,T-2} \end{pmatrix}$$

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM *Difference* (Arellano and Bond, 1991)

- Logo, temos:

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{Z}'\Delta\boldsymbol{u}] = \mathbf{0}$$

- Aplicando o método de momentos às condições de momento acima, obtemos o estimador de GMM:

$$\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GMM} = (\boldsymbol{G}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{S}_N\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{S}_N\boldsymbol{Z}'\Delta\boldsymbol{y}$$

onde $\widehat{\boldsymbol{\gamma}}_{GMM} = \left(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_{GMM}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}'_{GMM}\right), \boldsymbol{G} = (\Delta\boldsymbol{y}_{-1}, \Delta\boldsymbol{X})$ e

$\boldsymbol{S}_N = \left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Z}'_{i.}\widehat{\boldsymbol{u}}_{i.}\widehat{\boldsymbol{u}}'_{i.}\boldsymbol{Z}_{i.}\right)^{-1}.$

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM *Difference* (Arellano and Bond, 1991)

- Vale notar que o estimador GMM vale apenas para T curto.
- Quando $T \rightarrow \infty$, o número de condições de momento para a estimação de $\Delta y_{i,t-1}$, $T(T-1)/2$, também tende ao infinito, o que gera inconsistência no estimador.
- A consistência do estimador depende do fato de que os erros são não correlacionados, i.e. $E\left[\Delta u_{i,t} \Delta u_{i,t-2}\right] = 0$. Daí a necessidade de se testar a existência de autocorrelação de segunda ordem dos erros.

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM *System* (Blundell and Bond, 1998)

- Blundell & Bond (1998) mostram que o desempenho do estimador GMM-Diff deteriora à medida que a variável y_{it} se aproxima de um passeio aleatório, i.e. se observamos: i) $\lambda \to 1$; e ii) $\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_u^2}$ aumenta.
- Ou seja, para os casos em que a variável endógena demonstra alto grau de persistência, suas observações defasadas em nível, $y_{i,t-s}$, se tornam um instrumento fraco para as observações da mesma em primeira diferença, Δy_{it}.

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM *System* (Blundell and Bond, 1998)

Seja

$$\Delta y_{it} = \hat{\pi} y_{i,t-1} + \alpha_i + u_{it}$$

onde $\hat{\pi} = (\lambda - 1)$. Temos que:

$$Plim\hat{\pi} = (\lambda - 1)\frac{k}{\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_u^2} + k}$$

com $k = (1-\lambda)^2/(1-\lambda)$. Logo, $\hat{\pi} \to 0$ se $\lambda \to 1$ e/ou $\sigma_\alpha^2/\sigma_u^2 \to \infty$.

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM *System* (Blundell and Bond, 1998)

- Considere o processo dinâmico para o valor inicial da série em um modelo sem variáveis exógenas:

$$y_{it} = \alpha_i + \lambda y_{i,t-1} + u_{it}$$

$$\dots$$

$$y_{i0} = \frac{\alpha_i}{1-\lambda} + u_{i0}, i = 1,2,\dots,N$$

- Sob o pressuposto de que

$$E\left[u_{it}\Delta y_{i,t-1}\right] = 0, \forall\, t = 4,5,\dots,T$$

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM *System* (Blundell and Bond, 1998)

- Portanto, a condição$E\left[u_{it}\Delta y_{i,t-1}\right] = 0$ implica que a estacionariedade da variável y_{it} é condição suficiente (mas não necessária, uma vez que $E\left[u_{it}\Delta y_{i,t-1}\right] = 0$ não impõe restrição sobre a variância dos erros).
- O GMM *System* permite a inclusão de primeiras diferenças defasadas na matriz de variáveis instrumentais como instrumentos para as equações em nível.

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM *System* (Blundell and Bond, 1998)

- Ou seja, o cálculo do GMM-*Sys* utiliza a seguinte matriz de instrumentos:

$$\boldsymbol{W}_i^+ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta y_{i2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Delta y_{i3} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Delta y_{i,T-1} \end{pmatrix}$$

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

GMM *System* (Blundell and Bond, 1998)

- Simulações mostram consideráveis ganhos de eficiência do estimador GMM-*Sys* em relação ao estimador GMM-*Diff*. Os ganhos de eficiência são maiores quando $\lambda \to 1$ e $\sigma_\alpha^2/\sigma_u^2$ aumenta.

Variáveis Instrumentais e o Método de Momentos Generalizado

Teste de sobreidentificação

- A validade das condições de momento são testadas a partir do teste de Hansen (1982):

$$H = \Delta\hat{u}' W \left(\sum_{i=1}^{N} W_i' \, \Delta\hat{u}_i \Delta\hat{u}_i' \right)^{-1} W \Delta\hat{u} \sim \chi^2_{r-k-1}$$

- Se rejeitamos H_0 dizemos que os instrumentos não são válidos.